問　命題

m, n を整数とする．

（1）m, n に関する条件 p, q を次のように定める．

p：m, n の少なくとも 1 つは 3 の倍数でない

q：$m+n,\ m-n$ の少なくとも 1 つは 3 の倍数でない

p の否定 $\overline{p}$ は $\boxed{\text{ア}}$．p は q であるための $\boxed{\text{イ}}$．

（2）m, n に関する条件 r, s を次のように定める．

r：m, n の少なくとも 1 つは 4 の倍数でない

s：$m+n,\ m-n$ の少なくとも 1 つは 4 の倍数でない

s の否定 $\overline{s}$ が成立するならば，$\boxed{\text{ウ}}$．r は s であるための $\boxed{\text{エ}}$．

⓪ m, n の少なくとも 1 つは 3 の倍数である　① m, n はともに 3 の倍数である

② m, n はともに 3 の倍数でない　③ m, n はともに奇数である

④ m, n はともに偶数である　⑤ m, n のうち一方だけが偶数である

⑥ 必要十分条件である　⑦ 必要条件であるが，十分条件でない

⑧ 十分条件であるが，必要条件でない　⑨ 必要条件でも十分条件でもない

（センター試験）

考え方

必要条件・十分条件に関する問題．条件 p, q について，

- 命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとき， p は q であるための十分条件
- 命題「$q \Rightarrow p$」が真であるとき， p は q であるための必要条件

であることをおさえておこう．また， 「$p \Rightarrow q$」の真偽の判定については

- 反例（p かつ $\overline{q}$ をみたすもの）があれば偽
- 対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」と真偽が一致する

などもうまく使って考えよう．

解答

（1）p, q の否定 $\overline{p}, \overline{q}$ は

$\overline{p}$： m, n はいずれも 3 の倍数である．

$\overline{q}$： $m+n,\ m-n$ はいずれも 3 の倍数である．

である．

←「少なくとも一つ〇〇」の否定は「すべて〇〇でない」

命題「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」について考える．

← もとの命題のままで考えてもよいが， 対偶を考えたほうがラク．

$m=3k,\ n=3l$（k, l は整数）とおくと，

$$m+n=3(k+l),\quad m-n=3(k-l)$$

$k+l,\ k-l$ はいずれも整数なので， $m+n,\ m-n$ はいずれも 3 の倍数である．

よって， 命題「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」は真なので， その対偶「$q \Rightarrow p$」も真である．

次に， 命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」について考える．

$m+n=3k',\ m-n=3l'$（k', l' は整数）とおくと，

$$2m=3(k'+l'),\quad 2n=3(k'-l')$$

$k'+l'$, $k'-l'$ はいずれも整数なので，２式とも右辺は３の倍数であり，２と３は互いに素なので m, n が３の倍数である．
よって，命題「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」は真なので，その対偶「$p \Rightarrow q$」も真である．
以上より，p は q であるための必要十分条件である．　← $p \underset{\circ}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}} q$

ア → ①　　イ → ⑥

(2) s の否定 $\overline{s}$ は

　　$m+n$, $m-n$ はいずれも４の倍数である．

であり，これが成立するときを考える．
$m+n=4a$, $m-n=4b$ (a, b は整数) とおくと，

$$m=2(a+b), \quad n=2(a-b)$$

$a+b$, $a-b$ はいずれも整数なので，m, n はともに偶数である．
また，r の否定 $\overline{r}$ は

　　m, n はいずれも４の倍数である．

である．
命題「$\overline{r} \Rightarrow \overline{s}$」について考える．
$m=4a'$, $n=4b'$ (k', l' は整数) とおくと，

$$m+n=4(a'+b'), \quad m-n=4(a'-b')$$

$a'+b'$, $a'-b'$ はいずれも整数なので，$m+n$, $m-n$ はいずれも４の倍数である．
よって，命題「$\overline{r} \Rightarrow \overline{s}$」は真なので，その対偶「$s \Rightarrow r$」も真である．
次に，命題「$\overline{s} \Rightarrow \overline{r}$」について考える．
$m=6$, $n=2$ とすると $m+n=8$, $m-n=4$ となり $\overline{s}$ は成り立つが $\overline{r}$ は成り立たない．　← 反例は $\overline{s}$ を満たすが，$\overline{r}$ を満たさないもの
よって，命題「$\overline{s} \Rightarrow \overline{r}$」は偽なので，その対偶「$r \Rightarrow s$」も偽である．
以上より，r は s であるための必要条件であるが十分条件でない．　← $r \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} s$

ウ → ④　　エ → ⑦

参考〜命題の真偽について〜
命題「$p \Rightarrow q$」が真であるとは，

「p を満たすが q を満たさないこと」が起こらない

ということである．これは，

　　「p であってかつ q でないものは存在しない」という約束だと考え (「p であってかつ q でない」は禁止)，
　　約束に**違反があった場合は偽**とする　　(反例をいう，とは違反を指摘すること)

ととらえると分かりやすい．身近な例で考えてみると，「20 歳未満は飲酒してはいけない」という約束は，「20 歳未満なのに飲酒する」人がいれば約束違反 (＝命題は偽) ということである．
(問 1: Wason の４枚カード問題) 表にアルファベット，裏に数字を印刷したカードがある．これらのカードは，

「片面が母音ならば，もう１つの面は偶数」

という規則に従っているそうである．机の上に４枚のカードがあり，それぞれ $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{K}}$, $\boxed{4}$, $\boxed{7}$ と書かれた面が見えているとき，規則が守られているかどうかを調べるためには，最低限どのカードを裏返さなけらばならないか．
(解) 規則に違反するのは，「片面が母音かつもう１つの面は奇数」であるから，母音と奇数が見えているカードをめくる．答えは $\boxed{\mathrm{A}}$ と $\boxed{7}$．
(問 2) 命題「$N=99!$ が 150 桁ならば，$100N=100!$ は 152 桁である」の真偽を述べよ．
(解) 違反となるのは「99! が 150 桁かつ 100! が 152 桁でない」であるが，違反となることはない (99! の実際の桁数が分からなくてもわかるはず．自然数を 100 倍したら２桁増える)．違反がないから真である．ちなみに 99! は 156 桁．実は p が常に偽ならば命題 $p \Rightarrow q$ は真になる (腑に落ちないかもしれないがこれは定義)．