**問　2変数関数の最大・最小［対称式］**

実数 $x,\ y$ が $x+y=1$ および $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ を満たすとき

(1) $xy$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) $x^2y^2+x^2+y^2+xy$ の最大値と最小値を求めよ．　（同志社大）

考え方

本問も条件式を含む2変数関数の最大値・最小値を求める問題．条件式から1文字消去できるので，変域に注意しながら最大値・最小値を求めればよい．

ところで，最大値・最小値を求める $xy$，$x^2y^2+x^2+y^2+xy$ はいずれも $x$ と $y$ の対称式である．このような場合，

$x+y=s,\ xy=t$ とおいて $s,\ t$ の2変数関数として考える

ことが有効となることも多く，これは 別解 で紹介する．

解答

条件式より $y=1-x$ であり，$y \geqq 0$ なので

$$1-x \geqq 0$$
$$\therefore\ x \leqq 1$$

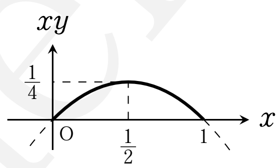
← $y$ を消去する．もちろん，$y$ のみの式にしてもよい．

これと $x \geqq 0$ より $0 \leqq x \leqq 1$ である．

(1)

$$\begin{aligned} xy &= x(1-x) \\ &= -x^2+x \\ &= -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ であるから，右のグラフより，
$xy$ は $x=\dfrac{1}{2}$ で最大値，$x=0,\ 1$ で最小値をとる．
$x+y=1$ であるから，




$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$　のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

$(x,\ y)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$ のとき最小値 $\mathbf{0}$

(2)

$$\begin{aligned} x^2y^2+x^2+y^2+xy &= x^2(1-x)^2+x^2+(1-x)^2+x(1-x) \\ &= x^4-2x^3+2x^2-x+1 \end{aligned}$$

← (1) 同様，1文字消去する

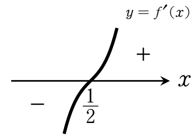
$f(x)=x^4-2x^3+2x^2-x+1$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3-6x^2+4x-1 \\ &= (2x-1)(2x^2-2x+1) \end{aligned}$$

よって，$f'(x)=0$ のとき $x=\dfrac{1}{2}$ なので，$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる．

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $\frac{13}{16}$ | ↗ | $1$ |

$2x^2-2x+1=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$ より，$f'(x)$ のグラフは下図のようになる．




増減表より，$f(x)$ は $x=0,\ 1$ で最大値，$x=\dfrac{1}{2}$ で最小値をとる．

$x+y=1$ であるから，

$(x,\,y)=(0,\,1),\,(1,\,0)$のとき最大値 $\mathbf{1}$

$(x,\,y)=\left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{1}{2}\right)$ のとき最小値 $\mathbf{\dfrac{13}{16}}$

**別解**（対称式であることを利用）

(1) $xy=t$ とおくと，$x,\,y$ は二次方程式 $X^2-X+t=0$ …① の 2 解である．
① の判別式を $D$ とおく．

$x+y=s,\ xy=t$ のとき，$x,\,y$ は 2 次方程式
$$X^2-sX+t=0$$
の 2 解である．

$x \geqq 0,\,y \geqq 0$ であるから，① が 0 以上の 2 つの実数解を持てばよいから，

$f(X)=X^2-X+t$ のグラフを考える．

$$D \geqq 0$$
$$t \geqq 0$$

← 判別式の条件．($D=1-4t$)

← 端点の条件 $f(X) \geqq 0$．
なお，軸の条件は（軸）$\geqq 0$ であるが，$y=f(X)$ の軸は $X=\dfrac{1}{2}$ となるため考える必要はない．

が成り立てばよい．よって，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{4}$ であり，$t=\dfrac{1}{4}$ のとき，① より
$$X^2-X+\frac{1}{4}=0$$
$$\therefore\quad X=\frac{1}{2}$$

← 重解であるから，$x,\,y$ ともに $\dfrac{1}{2}$ である．

$t=0$ のとき，① より
$$X^2-X=0$$
$$\therefore\quad X=0,\,1$$

← 2 解のうち一方が $x$，もう一方が $y$ である．

よって，

$(x,\,y)=\left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{1}{2}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}$

$(x,\,y)=(0,\,1),\,(1,\,0)$のとき最小値 0

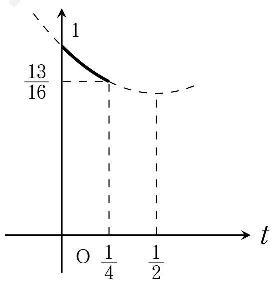
(2)
$$\begin{aligned}x^2y^2+x^2+y^2+xy&=(xy)^2+(x+y)^2-xy\\&=t^2-t+1\\&=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

← 与式は対称式であるから，$x+y,\,xy$ で表すことができる．

(1) より，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{4}$ であり，右図より
$t=0$ で最大値 1，$t=\dfrac{1}{4}$ で最小値 $\dfrac{13}{16}$ をとるので，

$(x,\,y)=(0,\,1),\,(1,\,0)$のとき最大値 1

$(x,\,y)=\left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{1}{2}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{13}{16}$




**解説**

多変数関数の最大・最小問題で、対称式を用いる問題を 1 つ紹介しておこう．
(問) 1 つの頂点から出る 3 辺の長さが $x,\,y,\,z$ であるような直方体において，$x,\,y,\,z$ の和が 6，全表面積が 18 であるとき，この直方体の体積の最大値を求めよ．（東大）

(解) 条件より，$x+y+z=6,\ xy+yz+zx=9$ である．直方体の体積を $V$ とおくと $V=xyz$ であり，解と係数の関係から $x,\,y,\,z$ は $t$ についての 3 次方程式 $t^3-6t^2+9t-V=0$ …(∗) の 3 解である．
$x>0,\,y>0,\,z>0$ であるから，(∗) が正の解を 3 個もつような $V$ のうち最大のものを考える (3 個の解には重解が含まれてもよい)．
$t^3-6t^2+9t=V$ であるから，$y=t^3-6t^2+9t$ と $y=V$ のグラフの共有点を考えると，右図より $V=4$ のとき方程式 (∗) の解は $t=1,\,4$ (1 は 2 重解) であり，
$V>4$ のときは (∗) の実数解は 1 個となる．
よって，直方体の体積の最大値は $\mathbf{4}$ (このとき 3 辺の長さは 1, 1, 4 である)