問　解の配置

$-4 \leqq p \leqq 6$ かつ $-4 \leqq q \leqq 6$ を満たす整数の組 $(p,\ q)$ のうち，２次方程式 $x^2+px+q=0$ が異なる２つの正の解をもつような組 $(p,\ q)$ は何個あるか．（慶應義塾大）

考え方

まずは，２次方程式 $x^2+px+q=0$ が「異なる２つの正の解」をもつための $p,\ q$ の条件を求める．そのためには，

- $f(x)=x^2+px+q$ として，$y=f(x)$ が x 軸の正の部分で異なる２点で交わる条件を考える
- ２次方程式 $x^2+px+q=0$ の２つの解を $\alpha,\ \beta$ としたとき，$\alpha>0,\ \beta>0$ となる条件を考える

のいずれの方法でもよいだろう．さらに，$p,\ q$ は $-4 \leqq p \leqq 6$ かつ $-4 \leqq q \leqq 6$ を満たす整数であることを考えればよい．

解答

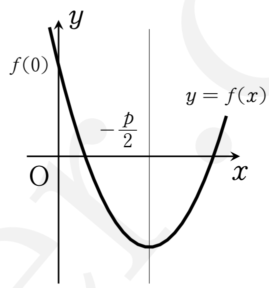
$f(x)=x^2+px+q$ とおき，$f(x)=0$ の判別式を D とする．

$$f(x)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q$$

より $y=f(x)$ の軸は $x=-\dfrac{p}{2}$ である．

２次方程式 $f(x)=0$ が異なる２つの正の解をもつとき，

$$D>0$$
$$-\frac{p}{2}>0$$
$$f(0)>0$$



← 判別式の条件．頂点の y 座標 $-\dfrac{p^2}{4}+q<0$ としてもよい．

← 軸の条件．

← 端点の条件．

すなわち

$$p^2-4q>0$$
$$p<0$$
$$q>0$$

である．これらと $-4 \leqq p \leqq 6$ かつ $-4 \leqq q \leqq 6$ を満たす整数 $(p,\ q)$ の組は

$$(p,\ q)=(-4,\ 1),\ (-4,\ 2),\ (-4,\ 3),\ (-3,\ 1),\ (-3,\ 2)$$

← $p=-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ q=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ に限られるから，これらのうち $p^2-4q>0$ を満たすものを挙げればよい．

の **5 個** である．

別解

２次方程式 $x^2+px+q=0$ の２つの解を $\alpha,\ \beta$ とおく．解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-p$$
$$\alpha\beta=q$$

が成り立つ．２次方程式 $x^2+px+q=0$ の判別式を D とすると，この２次方程式が異なる２つの正の解をもつとき，

$$D>0$$
$$\alpha+\beta>0$$
$$\alpha\beta>0$$

← 判別式の条件を忘れてはいけない．$\alpha,\ \beta$ が実数であれば，$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$ $\Rightarrow \alpha>0$ かつ $\beta>0$ が成り立つが，「$\alpha,\ \beta$ が実数」という条件がなければ成り立たない．反例は $\alpha=1+i,\ \beta=1-i$ など．

すなわち

$$p^2-4q>0$$
$$p<0$$
$$q>0$$

であるから，上記 **解答** と同様 $(p,\ q)$ の組は５個である．

qsteacher.com

$\boxed{\text{解説}}$〜解の配置〜

本問のような解の配置に関する問題は，$y=f(x)$ のグラフを用いて考えることが有効である．具体的には，

・判別式の符号（または頂点の y 座標の正負）　・軸の位置　・端点の y 座標の正負

の3つについて条件を考えるとよい．

$y=f(x)$ が下に凸の放物線であれば，「2次方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの正の解をもつ」ための条件は，

$$\cdot\ \text{判別式 } D>0 \qquad \cdot\ (\text{軸})>0 \qquad \cdot\ f(0)>0 \quad \cdots\cdots(*)$$

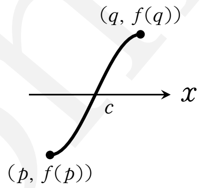
であり，「2次方程式 $f(x)=0$ が異符号の解をもつ」ための条件は，

$$f(0)<0 \quad \cdots\cdots(**)$$

である．この理由について少し触れておこう．以下では，$y=f(x)$ が直線 $x=p$ を軸とする下に凸の放物線であるとする（これ以降は，余力のある人のみ読もう）．

まず，以下の事実を認める（これは中間値の定理と呼ばれる．右図参照）．

関数 $y=f(x)$ が $p \leqq x \leqq q$ の範囲で連続（グラフが途切れていない）で，
$f(p)$ と $f(q)$ が異符号のとき，
$f(c)=0$ となる c が $p<c<q$ の範囲に少なくとも一つ存在する．……(★)



また，$y=f(x)$ は下に凸の放物線であるから，x の値が限りなく大きくなれば $f(x)$ の値も限りなく大きくなり，x の値が限りなく小さくなるときも $f(x)$ の値は限りなく大きくなる．このことは，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty \quad \cdots\cdots(★★)$$

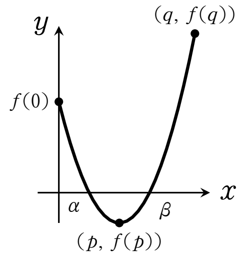
と表される．

さて，$(*)$ が成り立つとき，$f(0)>0$ かつ $p>0$ かつ $f(p)<0$ が成り立つから，(★) より

$f(\alpha)=0$ となる α が $0<\alpha<p$ で存在する　……①

ことがいえる．さらに，(★★) より $f(q)>0$ となる十分大きい q をとれるので，(★) より

$f(\beta)=0$ となる β が $p<\beta<q$ で存在する　……②

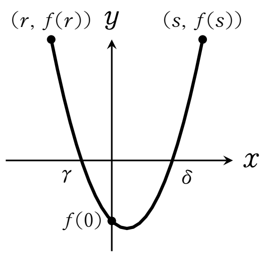


こともいえる．2次方程式 $f(x)=0$ の解は2個であることから，
①, ② より $(*)$ が成り立つとき2次方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの正の解をもつことがわかる．

次に，$(**)$ が成り立つとき，(★★) より $f(r)>0,\ f(s)>0$ となる十分小さい r と十分大きい s がとれる．(★) より

$f(\gamma)=0$ となる γ が $r<\gamma<0$ で存在し，
$f(\delta)=0$ となる δ が $0<\delta<s$ で存在する

ことがいえるから，$(**)$ が成り立つとき2次方程式 $f(x)=0$ は異符号の解をもつといえる．



dsteacher.com